פתרונות לבוחן אמצע, סמסטר חורף תשע"ה - 104016
3.12.14

ת"ז :

פקולטה :

- משך הבוחן : 2 שעות.
- השימוש בחומר עזר כלשהו ובמחשבונים אסור בהחלט.
- רשמו את כל תשובותיכם בדפים אלה. אפשר להשתמש בשני צידי הדף.
- **בשאלות 1-3** יש **לנמק** היטב כל תשובה. תשובה לא מנומקת לא תחשב.
בשאלות 4-6 יש לסמן את התשובה הנכונה בטבלה שבעמוד זה. בכל שאלה יש רק סימון אחד נכון.
בשאלה 7 יש לסמן אם הטענה נכונה או לא נכונה במקום המתאים בשאלה. סימון נכון מזכה ב- 3 נקודות; על סימון לא נכון **תורד נקודה אחת**. אי סימון כלל לא מזכה בנקודות.
- **אין לתת נימוקים בשאלות 4-7.**

ב ה צ ל ח ה !

טבלה לסימון תשובות נכונות בשאלות 4-6

	שאלה מס' 4	שאלה מס' 5	שאלה מס' 6
א.			
ב.			
ג.			
ד.			

לבודקים: יש לרשום את הציונים בדף השער.

<u>שאלה מס' 1</u> : (20 נקודות) (אין קשר בין הסעיפים)

א. מצאו את כל הפתרונות של המשוואה : $(2z+1)^6=-1$.

ב. תהי A המטריצה האלכסונית מסדר $n\times n$ שאיברי האלכסון שלה הם : $a_{jj}=j$

כלומר : $A=\begin{pmatrix}1&0&\cdots&0\\0&2&\ddots&\vdots\\\vdots&\ddots&\ddots&0\\0&\cdots&0&n\end{pmatrix}$. הוכיחו שאם B היא מטריצה מסדר $n\times n$ המתחלפת בכפל עם A אז B היא מטריצה אלכסונית.

פתרון שאלה 1:

א. נסמן $w=2z+1$. נפתור $(w)^6=-1$ ואז נחלץ את z כאשר $z=\frac{1}{2}(w-1)$.

$$(w)^6=-1$$

$$w=\sqrt[6]{-1}=\sqrt[6]{1cis180^\circ}=\sqrt[6]{1}\cdot cis\frac{180^\circ+360^\circ k}{6}=cis\left(30^\circ+60^\circ k\right),\ k=0,...,5$$

$$k=0\Rightarrow w_0=cis30^\circ=\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i\ \Rightarrow\ z_0=\frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i-1\right)$$

$$k=1\Rightarrow w_1=cis90^\circ=i\ \Rightarrow\ z_1=\frac{1}{2}(i-1)$$

$$k=2\Rightarrow w_2=cis150^\circ=-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i\ \Rightarrow\ z_2=\frac{1}{2}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i-1\right)$$

$$k=3\Rightarrow w_3=cis210^\circ=-\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i\ \Rightarrow\ z_3=\frac{1}{2}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i-1\right)$$

$$k=4\Rightarrow w_4=cis270^\circ=-i\ \Rightarrow\ z_4=\frac{1}{2}(-i-1)$$

$$k=5\Rightarrow w_5=cis330^\circ=\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i\ \Rightarrow\ z_5=\frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i-1\right)$$

ב. ניקח מטריצה B כללית מסדר $n\times n$ נציב בנתון ונראה שהיא בהכרח אלכסונית :

$$\begin{pmatrix}b_{11}&b_{12}&\cdots&b_{1n}\\b_{21}&b_{22}&\cdots&b_{2n}\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\b_{n1}&b_{n2}&\cdots&b_{nn}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&\cdots&0\\0&2&\ddots&\vdots\\\vdots&\ddots&\ddots&0\\0&\cdots&0&n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&\cdots&0\\0&2&\ddots&\vdots\\\vdots&\ddots&\ddots&0\\0&\cdots&0&n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}b_{11}&b_{12}&\cdots&b_{1n}\\b_{21}&b_{22}&\cdots&b_{2n}\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\b_{n1}&b_{n2}&\cdots&b_{nn}\end{pmatrix}$$

על פי הגדרת כפל מטריצות נקבל באגף שמאל שכל עמודה j של B מוכפלת ב- j ובאגף ימין נקבל כי כל שורה j של B מוכפלת ב- j.

$$\begin{pmatrix} b_{11} & 2b_{12} & \cdots & nb_{1n} \\ b_{21} & 2b_{22} & \cdots & nb_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & 2b_{n2} & \cdots & nb_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ 2b_{21} & 2b_{22} & \cdots & 2b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ nb_{n1} & nb_{n2} & \cdots & nb_{nn} \end{pmatrix}$$

עבור איברי האלכסון, $i = j$, בשני האגפים מקבלים $jb_{jj} = jb_{jj}$ כלומר אין אף תנאי על איברי האלכסון של B.

עבור איבר מחוץ לאלכסון, $i \neq j$, מקבלים כי באגף שמאל כל איבר b_{ij} מוכפל ב- j ואילו באגף ימין הוא מוכפל ב- i, כלומר לכל $i \neq j$ מתקיים $jb_{ij} = ib_{ij}$. ע"י העברת אגפים נקבל: $b_{ij}(j-i) = 0$. אבל $i \neq j$ ולכן $b_{ij} = 0$, כלומר B מטריצה אלכסונית.

אפשר גם לכתוב קצת אחרת:

נתון $AB = BA$ ולכן עבור $i \neq j$ (איבר מחוץ לאלכסון):

$$(BA)_{ij} = \sum_{k=1}^{n} b_{ik} a_{kj} \underset{\substack{a_{kj}=0, k\neq j \\ a_{kj}=j, k=j}}{=} jb_{ij} = (AB)_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj} \underset{\substack{a_{ik}=0, k\neq i \\ a_{ik}=i, k=i}}{=} ib_{ij}$$

$jb_{ij} = ib_{ij}$ ע"י העברת אגפים נקבל: $b_{ij}(j-i) = 0$. אבל $i \neq j$ ולכן $b_{ij} = 0$.

עבור $i = j$ (איבר באלכסון):

$$(BA)_{ii} = \sum_{k=1}^{n} b_{ik} a_{ki} \underset{\substack{a_{ki}=0, k\neq i \\ a_{ki}=i, k=i}}{=} ib_{ii} = (AB)_{ii} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{ki} \underset{\substack{a_{ik}=0, k\neq i \\ a_{ik}=i, k=i}}{=} ib_{ii}$$

קיבלנו זהות לכן אין תנאים על איברי האלכסון של B ולכן המטריצה B אלכסונית.

<u>שאלה מס' 2</u> : (23 נקודות)

נתונה מערכת המשוואות הבאה בשלושה נעלמים ממשיים x,y,z כאשר a,b פרמטרים ממשיים.

$$\begin{cases} ax+by+2z=1 \\ ax+2by+3z=1 \\ ax+by+(b+3)z=2b+1 \end{cases}$$

א. לאילו זוגות ערכים של a,b יש למערכת פתרון יחיד?

ב. לאילו זוגות ערכים של a,b אין למערכת פתרון?

ג. לאילו זוגות ערכים של a,b יש למערכת אינסוף פתרונות?

ד. נתון כי $b=1$ ולמערכת יש אינסוף פתרונות. מצאו את כל הפתרונות במקרה זה, המקיימים את התנאי: $x^2+3y=z$.

פתרון שאלה 2:

נדרג את מטריצת המקדמים המורחבת:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} a & b & 2 & 1 \\ a & 2b & 3 & 1 \\ a & b & b+3 & 2b+1 \end{array}\right) \underset{\substack{R_2\to R_2-R_1 \\ R_3\to R_3-R_1}}{\to} \left(\begin{array}{ccc|c} a & b & 2 & 1 \\ 0 & b & 1 & 0 \\ 0 & 0 & b+1 & 2b \end{array}\right)$$

אחרי דרוג נשארנו עם 3 משוואות שהן לא הכל 0 ולכן:

פתרון יחיד לכל הערכים: $a\neq 0$, $b\neq -1,0$.

נציב ערכים אלה:

$a=0$:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} a & b & 2 & 1 \\ 0 & b & 1 & 0 \\ 0 & 0 & b+1 & 2b \end{array}\right) \underset{a=0}{\to} \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & b & 2 & 1 \\ 0 & b & 1 & 0 \\ 0 & 0 & b+1 & 2b \end{array}\right) \underset{R_2\to R_2-R_1}{\to} \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & b & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & b+1 & 2b \end{array}\right) \underset{R_3\to R_3+(b+1)R_2}{\to} \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & b & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & b-1 \end{array}\right)$$

לפי שורה 3, אם $b\neq 1$ אין פתרון ואם $b=1$ יש אינסוף פתרונות עם דרגת חופש אחת.

$b=0$:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} a & b & 2 & 1 \\ 0 & b & 1 & 0 \\ 0 & 0 & b+1 & 2b \end{array}\right) \underset{b=0}{\to} \left(\begin{array}{ccc|c} a & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \underset{R_3\to R_3-R_2}{\to} \left(\begin{array}{ccc|c} a & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

לפי שורה 1: אם $a\neq 0$ יש אינסוף פתרונות, ואם $a=0$ נציב ונבדוק:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \underset{R_2\to 2R_2-R_1}{\to} \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

אין פתרון.

$b=-1$:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} a & b & 2 & 1 \\ 0 & b & 1 & 0 \\ 0 & 0 & b+1 & 2b \end{array}\right) \underset{b=-1}{\rightarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} a & -1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{array}\right)$$

לפי שורה 3, אין פתרון לכל a.
סיכום :

א. פתרון יחיד : $a \neq 0$ וגם $b \neq -1$ וגם $b \neq 0$.

ב. אין פתרון : $a=0$ וגם $b \neq 1$ או $a=0$ וגם $b=0$ (כלול במקרה הקודם) או $b=-1$ וכל a.

ג. אינסוף פתרונות : $a=0$ וגם $b=1$ או $b=0$ וגם $a \neq 0$.

ד. נתון ש $b=1$ ולמערכת יש אינסוף פתרונות. לפי סעיפים קודמים, האפשרות היחידה היא כאשר $a=0$ (אפשר גם להציב במטריצה המורחבת המדורגת ולהסיק שבהכרח $a=0$). כפי שראינו במקרה זה נקבל שהמטריצה המורחבת היא :

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \underset{R_1 \to R_1 + 2R_2}{\rightarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \underset{R_2 \to -R_2}{\rightarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\begin{cases} y=-1 \\ z=1 \end{cases} \Rightarrow \quad (x\,,\,y\,,\,z)=(x\,,\,-1\,,\,1)$$

$$x^2+3y=z \;\Rightarrow\; x^2-3=1 \;\Rightarrow\; x^2=4 \;\Rightarrow\; x=\pm 2$$

לכן הפתרונות המבוקשים הם : $(-2\,,\,-1\,,\,1)$, $(2\,,\,-1\,,\,1)$.

<u>שאלה מס' 3</u> : (21 נקודות)

הוכיחו את הטענות הבאות או הפריכו ע"י דוגמא נגדית:

א. לפולינום $x^4-17x^3+\sqrt{7}\,x^2-11$ יש לפחות שורש ממשי אחד.

ב. אם $A\,,\,B$ שתי מטריצות ממשיות וריבועיות המקיימות $A^2=B^2$ אז $A=B$ או $A=-B$.

ג. אם $A\,,\,B$ שתי מטריצות שקולות שורה ולמערכות $A\overline{x}=b$ יש פתרון אז גם למערכת $B\overline{x}=b$ יש פתרון.

פתרון שאלה 3:

א. **הטענה נכונה**. נניח בשלילה שהטענה לא נכונה כלומר לפולינום אין שורשים ממשיים. מאחר והמקדמים של הפולינום הם ממשיים הרי ששורשים לא ממשיים באים בזוגות של שורש והצמוד שלו. נסמן את השורשים: $z_1\,,\,\overline{z}_1\,,\,z_2\,,\,\overline{z}_2$. לפי נוסחת ויאטה מתקיים:

$z_1\cdot\overline{z}_1\cdot z_2\cdot\overline{z}_2=\dfrac{(-1)^4a_0}{a_n}$. נציב את המקדמים של הפולינום ונעזר בחוק שלכל מספר מרוכב מתקיים $z\cdot\overline{z}=|z|^2$ ונקבל: $|z_1|^2\cdot|z_2|^2=-11$. קיבלנו באגף שמאל מספר חיובי ובאגף ימין מספר שלילי, וזו סתירה, ולכן בהכרח יש לפולינום לפחות שורש ממשי אחד.

הערה: אפשר להוכיח גם באמצעות כלים של חדו"א.

ב. **הטענה לא נכונה**. נבחר למשל $A=\begin{pmatrix}1&1\\-1&-1\end{pmatrix}$ ו- $B=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}$. מתקיים:

$A^2=\begin{pmatrix}1&1\\-1&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1\\-1&-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$, $B^2=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$ אבל $A\neq\pm B$.

ג. **הטענה לא נכונה**. נבחר $A=\begin{pmatrix}1&1\\-1&-1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1&1\\0&0\end{pmatrix}$ ו- $b=\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$. המטריצות A ו- B שקולות שורה כי: $A=\begin{pmatrix}1&1\\-1&-1\end{pmatrix}\underset{R_2\to R_2+R_1}{\to}\begin{pmatrix}1&1\\0&0\end{pmatrix}=B$ ולמערכת $A\overline{x}=b$ יש פתרון, למשל $\overline{x}=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ אבל למערכת $B\overline{x}=b$ אין פתרון כי $(B|b)=\left(\begin{array}{cc|c}1&1&1\\0&0&-1\end{array}\right)$ כלומר $r(B|b)=2>r(B)=1$.

<u>במבחן היו טורים לכן יש לבדוק לפי התשובה הנכונה ולא לפי מספר הסעיף</u>

<u>שאלה מס' 4</u> : (6 נקודות)

תהי A מטריצה ממשית מסדר 3×3. נתון כי: $u_2=\begin{pmatrix}4\\2\\0\end{pmatrix}$, $u_1=\begin{pmatrix}2\\2\\6\end{pmatrix}$ הם פתרונות של המערכת

$A\bar{x}=\begin{pmatrix}1\\1\\7\end{pmatrix}$, אז אחד הפתרונות של המערכת $A\bar{x}=0$ הוא:

א. $\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$; ב. $\begin{pmatrix}6\\4\\6\end{pmatrix}$; ג. $\begin{pmatrix}1\\0\\-3\end{pmatrix}$; ד. $\begin{pmatrix}1\\1\\3\end{pmatrix}$.

פתרון שאלה 4:

הפרש שני פתרונות פרטיים למערכת האי הומוגנית נותן פתרון פרטי אחד למערכת ההומוגנית

המתאימה ולכן $u_1-u_2=\begin{pmatrix}-2\\0\\6\end{pmatrix}$ הוא פתרון למערכת ההומוגנית $A\bar{x}=0$. מאחר ואוסף הפתרונות של

מערכת הומוגנית הוא תת מרחב של R^3 הרי שגם כל כפולה של פתרון זה הוא פתרון למערכת בפרט:

$$-\frac{1}{2}\cdot\begin{pmatrix}-2\\0\\6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\\-3\end{pmatrix}.$$

סימון נכון: ג'.

<u>שאלה מס' 5</u> : (6 נקודות)

יהי $z\in C$, המקיים $z\neq1$ וגם $|z|=1$ אז $\operatorname{Im}\left(\frac{6i}{1-z}\right)$ שווה ל:

א. 0 ; ב. 1 ; ג. 2 ; ד. 3 .

פתרון שאלה 5:

נפשט תחילה את הביטוי הנתון, נציב $z=a+ib$ כאשר $a,b\in R$ ונזכור גם שנתון: $|z|=1$ לכן גם

$|z|^2=1$ כלומר: $a^2+b^2=1$. נרצה לכפול את הביטוי בצמוד של המכנה כלומר ב: $\overline{1-z}=1-\bar{z}$:

$$\frac{6i}{1-z}=\frac{6i}{1-z}\cdot\frac{1-\bar{z}}{1-\bar{z}}=\frac{6i(1-\bar{z})}{|1-z|^2}=\frac{6i(1-a+ib)}{|(1-a)-ib|^2}=\frac{6i(1-a)-6b}{(1-a)^2+(-b)^2}=\frac{6i(1-a)-6b}{1-2a+a^2+b^2}=\frac{-6b+6(1-a)i}{2-2a}$$

לכן $\operatorname{Im}\left(\frac{6i}{1-z}\right)=\frac{6(1-a)}{2-2a}=\frac{6(1-a)}{2(1-a)}=\frac{6}{2}=3$

סימון נכון: ד'.

<u>שאלה מס' 6</u> : (6 נקודות)

יהי V המרחב הוקטורי של כל הפונקציות הממשיות (כלומר מרחב כל הפונקציות $f:R\to R$) מעל R,

אז הקבוצה המהווה תת מרחב וקטורי של V היא:

א. כל הפונקציות $f(x)$ ב- V המקימות את התנאי $\left(f(2)\right)^2=f(3)$.

ב. כל הפונקציות $f(x)$ ב- V המקימות את התנאי $f(2)\cdot f(3)=0$.

ג. כל הפונקציות $f(x)$ ב- V המקימות את התנאי $f(2)=7f(3)$.

ד. כל הפונקציות $f(x)$ ב- V המקימות את התנאי $f(2)=3$.

פתרון שאלה 6:

א. **לא תת מרחב**. אין סגירות לכפל בסקלר: $f(x)=1$ מתקיים: $\left(f(2)\right)^2=(1)^2=1=f(3)$ לכן שייך לקבוצה. נבחר $\alpha=2$ ונקבל: $\left(2f(2)\right)^2=(2\cdot1)^2=4\neq1=f(3)$.

ב. **לא תת מרחב**. אין סגירות לחיבור: נבחר $f(x)=x-2\ ,\ g(x)=x-3$. מתקיים:

$f(2)\cdot f(3)=0\cdot1=0\ ,\ g(2)\cdot g(3)=(-1)\cdot0=0$ לכן בקבוצה, אבל:

$h(x)=f(x)+g(x)=2x-5$ לא בקבוצה כי: $h(2)\cdot h(3)=(-1)\cdot1=-1\neq0$.

ג. **כן תת מרחב**. נוכיח את 3 התכונות של תת מרחב:

1. $f_0(x)=0$ שייך לקבוצה כי $f_0(2)=0=7f_0(3)=7\cdot0=0$.

2. ניבחר שתי פונקציות $f(x)\ ,\ g(x)$ בקבוצה לכן הן מקיימות: $f(2)=7f(3)$ וגם $g(2)=7g(3)$. נראה שגם הסכום מקיים את התנאי:

$$(f+g)(2)=f(2)+g(2)=7f(3)+7g(3)=7\left(f(3)+g(3)\right)=7(f+g)(3)$$

3. לכל סקלר $\alpha\in R$ נקבל: $(\alpha f)(2)=\alpha f(2)=\alpha\left(7f(3)\right)=7\left(\alpha f(3)\right)=7\left(\alpha f\right)(3)$.

ד. **לא תת מרחב**. פונקציית ה- 0, $f_0(x)=0$, לא בקבוצה לכן לא מרחב וקטורי.

סימון נכון: ג'.

<u>שאלה מס' 7</u> : (18 נקודות)

עבור כל אחת מהטענות הבאות קבעו אם האם היא נכונה או לא נכונה, וסמנו את התשובה במקום המתאים בטבלה (אין צורך לנמק. נימוקים לא ייבדקו):

בשאלה זו, $R_5[x]$ הוא מרחב הפולינומים ממעלה לכל היותר 5 עם מקדמים ממשיים מעל R

ו- $R^{3\times3}$ הוא מרחב המטריצות הממשיות מסדר 3×3 מעל R.

נסמן בטבלה את הסימונים הנכונים. הנימוקים נמצאים מתחת לטבלה:

טענה	נכון	לא נכון
1. אם $p(x)$, $q(x)$ הם שני פולינומים עם מקדמים ממשיים ו- $x_1 \in C$ הוא שורש מריבוי k של $p(x)$ ושל $q(x)$ אז x_1 הוא גם שורש מריבוי k של $p(x)+q(x)$.		X
2. אם A ו- B הן שתי מטריצות ריבועיות, שקולות שורה ו- A סימטרית אז גם B סימטרית.		X
3. יהי $V=R_5[x]$ אז אוסף כל הפולינומים ב V שיש להם לפחות שורש ממשי אחד הוא תת מרחב וקטורי של V.		X
4. יהי $V=R^{3\times3}$ אז אוסף כל המטריצות ב V המתחלפות בכפל עם המטריצה $B\in V$ שכל איבריה שווים ל- $\sqrt{2}$ הוא תת מרחב וקטורי של V.	X	
5. אם A מטריצה ממשית כך שלמערכת $A\bar{x}=b$ אין פתרון אז למערכת $A\bar{x}=0$ יש אינסוף פתרונות.		X
6. אם A ו- B מטריצות ממשיות $n\times n$ כך ש- A סימטרית, B אנטי סימטרית ומתחלפות בכפל אז AB אנטי סימטרית.	X	

פתרון שאלה 6:

1. **לא נכון**. הטענה הנכונה היא ש- x_1 הוא שורש מריבוי **לפחות** k של $p(x)+q(x)$ ולא בדיוק k.

דוגמא: ניקח $p(x)=x^2+x$, $q(x)=x^2-x$. בשניהם $x_1=0$ הוא שורש מריבוי $k=1$ אבל בפולינום $p(x)+q(x)=x^2$ נקבל ש $x_1=0$ הוא שורש מריבוי 2.

2. **לא נכון.** המטריצות $A=\begin{pmatrix}1&2\\2&3\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}$ שקולות שורה (בדקו שהצורה הקנונית של שתיהן היא מטריצת היחידה I_2) ו- A סימטרית אבל B לא.

3. **לא נכון.** אין סגירות לחיבור. למשל, לפולינום: $p(x)=x+1$ יש שורש ממשי שהוא -1.
לפולינום $q(x)=x^2$ יש שורש ממשי שהוא 0, אבל לסכום: $q(x)+p(x)=x^2+x+1$ אין שורש ממשי.

4. **נכון.** מטריצת ה- 0 מסדר 3×3 מתחלפת בכפל עם כל מטריצה מאותו סדר בפרט עם B הנתונה. יהיו C,D שתי מטריצות המקיימות $DB=BD$, $CB=BC$ אז גם הסכום מקיים זאת: $(C+D)B=CB+DB=BC+BD=B(C+D)$ וכן עבור כל סקלר ממשי α מתקיים: $(\alpha C)B=\alpha(CB)=\alpha(BC)=B(\alpha C)$.

5. **לא נכון.** נסתכל על המערכת: $\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$ שאין לה פתרון אבל למערכת ההומוגנית המתאימה:
$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$ יש פתרון יחיד ולא אינסוף פתרונות.

6. **נכון.** נתון $A^t=A$, $B^t=-B$ ו- $AB=BA$ אז $(AB)^t=B^tA^t=-BA=-AB$ כלומר AB אנטי סימטרית.